PART4 部分積分法

要点整理と公式

要点 ① 部分積分法

積の微分法の公式

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

より $f(x)g(x)$ は右辺の原始関数である。

よって

$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$$

この結果より，次の公式が成り立つ。

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

(ex) 不定積分 $\int x\sin x dx$ を求める。

$$\int x\sin x dx=\int x \qquad dx$$

$$= \cdot \qquad -\int \quad \cdot \qquad dx$$

$$=x(-\cos x)-\int \quad \cdot(-\cos x)dx$$

$$=-x\cos x+\sin x+C$$

(ex) 不定積分 $\int \log x dx$ を求める。

$$\int \log x dx=\int \quad \log x dx=\int \qquad \log x dx$$

$$=x\log x-\int x \quad dx$$

$$=x\log x-\int dx=x\log x-x+C$$

[MEMO]

4 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x+1)\cos 2x dx$　　(2) $\int x^2 e^{-x} dx$　　(3) $\int \log(x-2) dx$

Point Pickup

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

積分する関数が，種類の異なる関数の積の形になっているときに有効。

$f(x)$ として

・整式（微分すると次数が下がる）

・対数関数（微分すると分数関数になる）

を選ぶとよい。

第16講 PART4 確認問題

次の不定積分を求めよ。

ただし，答えは下の選択肢のうちから選べ。

また，C は積分定数とする。

1 $\int (x+1)\sin x dx = \int (x+1)(\boxed{\text{ア}})' dx$

$= \boxed{\text{イ}} + C$

[$\boxed{\text{ア}}$ の選択肢]

① $\sin x$　② $-\sin x$

③ $\cos x$　④ $-\cos x$

[$\boxed{\text{イ}}$ の選択肢]

① $-(x+1)\cos x$　② $(x+1)\sin x - \cos x$

③ $(x+1)\cos x - \sin x$　④ $-(x+1)\cos x + \sin x$

2 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int \boxed{\text{ウ}} e^x dx$

$= (\boxed{\text{エ}}) e^x + C$

[$\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢]

① x　② $2x$

③ x^2　④ $\frac{1}{3}x^3$

[$\boxed{\text{エ}}$ の選択肢]

① $x^2 - x + 1$　② $x^2 + x - 1$

③ $x^2 - 2x + 2$　④ $x^2 + 2x - 2$

3 $\int x^2 \log x dx = \int (\boxed{\text{オ}})' \cdot \log x dx$

$= \boxed{\text{カ}} + C$

[オ の選択肢]

① $2x$　　② x^2

③ x^3　　④ $\dfrac{x^3}{3}$

[カ の選択肢]

① $x^2 \log x - \dfrac{x^2}{2}$　　② $x^3 \log x - x^3$

③ $\dfrac{x^3}{3} \log x - \dfrac{x^3}{3}$　　④ $\dfrac{x^3}{3} \log x - \dfrac{x^3}{9}$

[MEMO]

PART4 部分積分法

4 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x+1)\cos 2x\,dx$　(2) $\int x^2 e^{-x}\,dx$　(3) $\int\log(x-2)\,dx$

[解答]

(1) $\int(x+1)\cos 2x\,dx=\int(x+1)\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx$

$$=(x+1)\cdot\frac{\sin 2x}{2}-\int 1\cdot\frac{\sin 2x}{2}dx=\frac{1}{2}(x+1)\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

(2) $\int x^2 e^{-x}\,dx=\int x^2(-e^{-x})'dx$

$$=x^2\cdot(-e^{-x})-\int 2x\cdot(-e^{-x})dx$$

$$=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\int x\cdot(-e^{-x})'dx$$

$$=-x^2e^{-x}+2\left\{x\cdot(-e^{-x})-\int 1\cdot(-e^{-x})dx\right\}$$

$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx$$

$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C=-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$$

(3) $\int\log(x-2)dx=\int 1\cdot\log(x-2)dx=\int(x-2)'\cdot\log(x-2)dx$

$$=(x-2)\cdot\log(x-2)-\int(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}dx$$

$$=(x-2)\log(x-2)-\int dx=(x-2)\log(x-2)-x+C$$

第16講 PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：④，イ：④

[解説]

$$\int (x+1)\sin x dx$$

$$= \boldsymbol{\int (x+1)(-\cos x)' dx}$$

$$= (x+1)(-\cos x) - \int (x+1)' \cdot (-\cos x) dx$$ [A]

$$= -(x+1)\cos x + \int \cos x dx$$

$$= \boldsymbol{-(x+1)\cos x + \sin x + C}$$

[A]　部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx$$

$$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ここでは，$f(x)=x+1$，$g'(x)=\sin x$ とおく。

2

[正解] ウ：②，エ：③

[解説]

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx$$

$$= x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx$$ [B]

$$= \boldsymbol{x^2 e^x - \int 2xe^x dx}$$

$$= x^2 e^x - 2\int x(e^x)' dx$$ [C]

$$= x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right)$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$= \boldsymbol{(x^2 - 2x + 2)e^x + C}$$

[B]　部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx$$

$$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ここでは，$f(x)=x^2$，$g'(x)=e^x$ とおく。

[C]　もう一度，部分積分法を用いる。

3

[正解] オ：④，カ：④

[解説]

$$\int x^2\log x dx=\int\left(\boldsymbol{\frac{x^3}{3}}\right)'\boldsymbol{\cdot\log x dx}$$ [D]

$$=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^3}{3}\cdot(\log x)'dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^2}{3}dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}+C}$$

[D]　部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx$$

$$=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$(\log x)'=\frac{1}{x}$ だから，

$f(x)=\log x$，$g'(x)=x^2$ とする。